

107 學年度臺北市
普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽
物理科理論試題

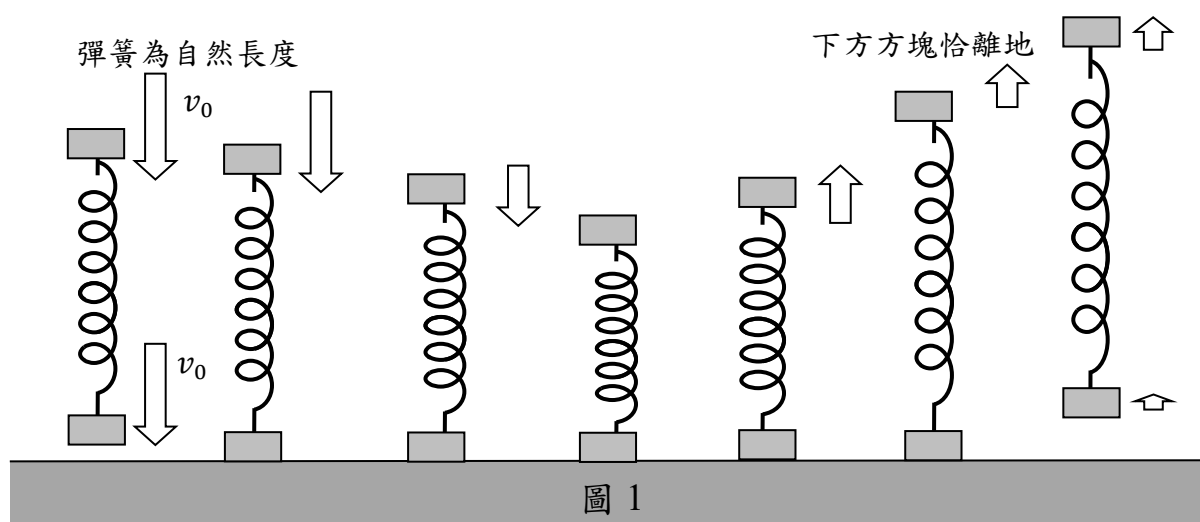
未宣布考試開始前，**不**得翻閱試題本！

本試題含封面共 2 張 4 頁

請在答題本上指定區域作答

考試結束，試題回收

- 一、考慮兩個質量相等的方塊形成的方塊組，一個方塊的質量 m ，中間以一質量可以忽略之彈簧連接，彈簧的力常數 k 。方塊組在彈簧垂直的狀況下，同時垂直下落，彈簧保持自然長度，如圖 1 所示。下方方塊撞擊地面前瞬間，方塊組的速率為 v_0 。假設下方方塊與泥狀地面的撞擊為一完全非彈性碰撞，即碰撞後，下方方塊立即停止運動，不反彈。上方的方塊繼續下降，壓縮彈簧，接著停止運動並反彈。這是一個簡諧運動，只是進行不到一個週期。上方方塊反彈上升，會拉長彈簧，一段時間後，下方方塊接著離開地面，假設離開時，不需要克服地面對方塊的黏著力。下方方塊離開地面後，兩方塊的質心會作自由拋體運動，而兩方塊相對於質心，會作簡諧運動。假設方塊的大小以及過程中的摩擦力都可以忽略。



- a.) 計算質心在下方方塊剛離開地面時的初速。找出下方方塊能離地， v_0 必須滿足的條件。 (6 分)

提示：先找出下方方塊剛離開地面時彈簧的伸長量。

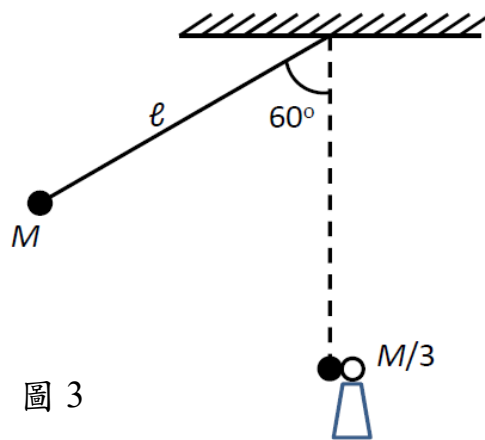
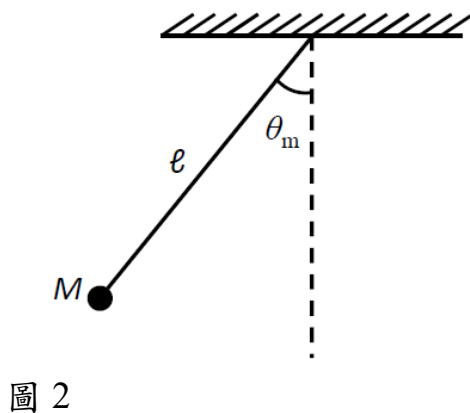
- b.) 計算下方方塊離開地面後，兩方塊相對於質心的簡諧運動之週期與振幅。以上答案以 m 、 k 、 g 、 v_0 表示。 (6 分)

- 二、考慮一存放於體積 V 的密閉立方容器中、溫度為 T 的 1 莫耳單原子凡得瓦氣體(凡得瓦氣體係指氣體分子具有一定體積、且分子間存在凡得瓦吸引力的非理想氣體)。
- 已知氣體分子的硬球半徑是 r ，且氣體內能為 $\frac{3}{2}N_A kT - \frac{a}{V}$ (第一項是運動動能，第二項是凡得瓦位能，該位能會使得器壁壓力減少 $\frac{a}{V^2}$)。其中 N_A 是亞佛加厥常數， k 是波茲曼常數， a 是一個常數。 a 和 r 均為小量。

- a.) 推導凡得瓦氣體的狀態方程。 (6 分)
- b.) 計算定壓時的氣體比熱。
- 提示：計算時須考慮系統的能量守恆，亦即所吸收的熱量等於系統的內能變化加上所做的功。 (6 分)

三、 已知在弦線上傳遞的弦波波速 v 與弦線所受的張力 T 和線質量密度 $\mu (=m/\ell)$ 有關，其關係為 $v = \sqrt{T/\mu}$ 。有一長為 ℓ 、質量為 m 的鋼弦，上方固定在天花板，下方懸掛質量為 M 的鋼球 ($m \ll M$)；撥動鋼弦，可在其上形成駐波。取重力加速度為 g 。

- a.) 緩緩抬升鋼球至與鉛垂線成 θ_m 角後放手，形成擺長為 ℓ 的單擺(如圖 2)，則鋼弦上的基音頻率最大值與最小值為何？(以 M 、 g 、 θ_m 、 m 、 ℓ 表示) (6 分)
- b.) 若鋼球質量 M 為 1.0 公斤、鋼弦長 ℓ 為 1.0 公尺、質量 m 為 10 公克，拉開鋼球至與鉛垂線成 60° 角後放手，當鋼球盪到最低點時與一質量為 $M/3$ 的靜止球體發生完全非彈性碰撞(如圖 3)，鋼球與球體合為一體形成單擺，則碰撞後瞬間輕繩上的張力為何？碰撞後，鋼弦的基音頻率最大值與最小值為何？ (6 分)



四、 以下考慮光在不同介質中傳播時所會發生的現象。

- a.) 如圖 4，當光由折射率 n_1 傳遞到折射率 n_2 的介質中，入射角為 θ_1 而折射角為 θ_2 。請寫下折射定律(Snell 定律)。 (2 分)
- b.) 如圖 5，有一道陽光由空氣照射到透明球形水珠中，途中總共經過兩次折射與一次反射。因為折射率是波長的函數，因此不同顏色的光會具有不同的行進方向。請問，紫光是在 A 位置還是 B 位置？為什麼？ (4 分)

- c.) 如圖 6，有一道固定波長的光束由空氣照射到折射率為 n 的透明球形水珠中，途中共經過兩次折射與一次反射。假設入射角為 θ ，且光束沿圖中直線偏折前進。請證明光線的偏折角度 $\phi = \pi + 2\theta - 4 \sin^{-1}(\frac{\sin \theta}{n})$ (6 分)

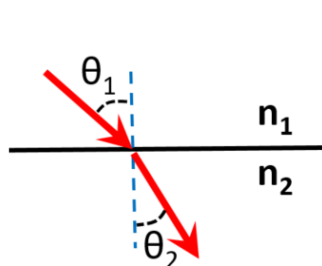


圖 4

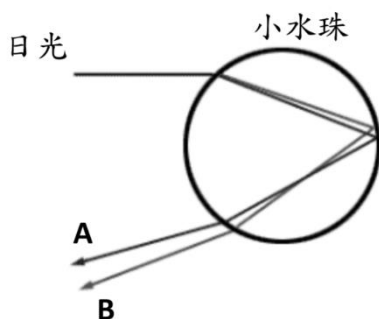


圖 5

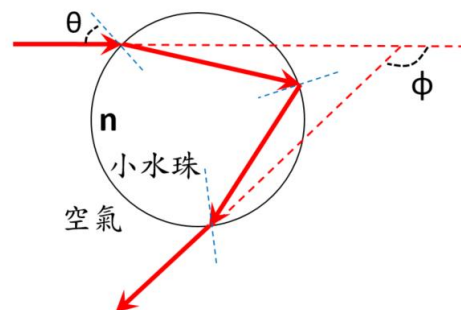


圖 6

- 五、考慮位置固定，距離為 $2a$ ，等電荷量 Q ($Q > 0$) 的兩個點電荷，設兩點電荷 Q 之間的軸為 x 軸，中點為原點，垂直方向為 y 軸。若在原點，放置一個可以移動的點電荷 q ($q > 0$)，它所受的靜電力是零，因此這是一個平衡點。

- a.) 假設點電荷 q 可以移動，但限制於 x 軸上，當它離開原點一個很小距離 d ($d \ll a$) 時 (圖 7)，證明所受靜電力是指向原點，因此是一個穩定的平衡點。靜電力的大小近似(至 d 的一次方)可以寫成 $c \cdot d$ ，計算常數 c 。

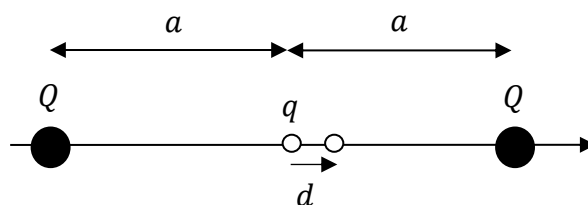


圖 7

以 k 、 Q 、 q 、 a 表示。 (6 分)

- b.) 若點電荷 q 可以沿其他方向移動，考慮它沿 y 軸方向離開原點一個很小距離 d ($d \ll a$) 時 (圖 8)，證明所受靜電力是指向離開原點，因此是一個不穩定的平衡點。靜電力的大小近似(至 d 的一次方)可以寫成 $c' \cdot d$ ，計算常數 c' 。

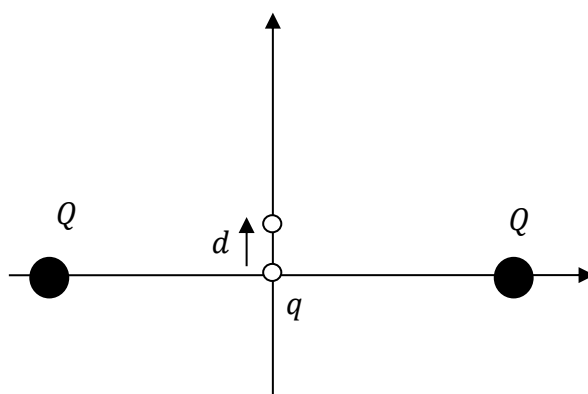


圖 8

(6 分)